Examen 4 Álgebra lineal 1. Valores y vectores propios

Profesor: Angel Vázquez Badillo

Instrucciones: Demuestre y justifique ampliamente sus respuesta .Resuelva 4 de los 5 problemas.

1. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un campo F y sea $\alpha : V \longrightarrow V$ un operador líneal.Dado un escalar $c \in F$, demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

   a) c es un valor propio de α.

   b) $Ker(cI - \alpha) \neq \{0\}$ donde I es el operador identidad.

   c) Dada $A = [\alpha]_B$ la representación matricial de α en alguna base B de V, entonces $det(cI - A) = 0$ con I la matriz identidad.

2. Sea V un espacio vectorial sobre un campo F y sea $\alpha : V \longrightarrow V$ un operador líneal en V. Sean $c_1, c_2, ..., c_k$ los valores propios distintos de α y si v_i es un vector propio de α asociado con c_i $\forall 1 \leq i \leq k$, entonces el conjunto $\{v_1, ..., v_k\}$ es linealmente independiente.

3. Sea $n \in \mathbb{Z}$ y sea $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{Q})$. Sean $c_1, c_2, ..., c_n$ los valores propios de A no necesariamente todos distintos considerando a A como una matriz en $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$. Demostrar que $\sum_{i=1}^{n} c_i$, $\prod_{i=1}^{n} c_i \in \mathbb{Q}$ (es decir la suma y el producto de todos los valores propios es racional).

4. Sea $A \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ una matriz con valores propios distintos a, b $(a \neq b)$. Demostrar que $\forall n > 0$
   $A^n = \frac{a^n}{a-b}(A - bI) + \frac{b^n}{b-a}(A - aI)$
   Con I la matriz identidad en $\mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$.

5. Sea $P \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ la cadena de Markov de dos estados definida como sigue:

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

   con $a, b \in (0, 1)$. Calcular los valores propios y vectores propios de P.