**Ejercicio.** *Sea* V *el espacio vectorial de las funciones continuas de* $\mathbb{R}$ *a* $\mathbb{R}$*. Sea* T *el operador lineal definido por:*
$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt$
*Demuestre que* T *no tiene valores propios.*

Procedamos por contradicción Supongamos que existe al menos un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt = \lambda f(x)$

Defino $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \lambda f(x)...$ (1)
con $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donde $F$ es una funcion continua y derivable ya que $f$ es continua y por lo tanto integrable.Si $\lambda = 0$(recordemos que los valores propios si pueden ser 0), tengo que al aplicar el teorema fundamental del cálculo obtengo:

$F'(x) = f(x) = 0 \forall x \in \mathbb{R}$ pero$f(x)$ es un vector propio y por definición tiene que ser una funcion distanta a al de cero por lo que existe una contradicción.

Ahora supongamos que $\lambda \neq 0$. Entonces para este caso tenemos la siguiente ecuación diferencial derivando (1).Tenemos que $f(x) = F(x)/\lambda$ la cual resulta derivable ya que $F$ lo es(por cálculo):
$f(x) = \lambda f'(x)$
tomando $f(x) \neq 0$ ya que es vector propio**(OJO:desde la definición de valor propio).**
Tomamos $y = f(x)$ y $y' = f' = dy/dx$ e integramos la anterior expresión con respecto a $y$ obteniendo :
$\int \lambda dy/y = \int dx$
$\Longrightarrow \lambda ln(y) = x + c$ con $c$ una constante
$\Longrightarrow lny = (x + c)/\lambda$
$\Longrightarrow e^{ln(y)} = e^{(x+c)/\lambda}$ aplicando la función exponencial
$\Longrightarrow y = ke^{x/\lambda}$ tomando a $k = e^{c/\lambda}$ Regresando al problema original y evaluando la integral para $x = 0$ se cumple que:

$$\int_0^x e^{t+c/\lambda}dt = \lambda e^{x+c/\lambda}$$

$\Longrightarrow \int_0^0 f(t)dt = 0 = \lambda e^{c/\lambda} \neq 0$ lo cual resulta de nuevo una contradicción ya que por hipotesis $\lambda \neq 0$ y la función exponencial es distinta de cero $\forall x \in \mathbb{R}$
Por lo tanto, $T$ no tiene valores propios.