Tarea 2 Álgebra lineal 1. Teorema de la dimensión, Sumas directas y Transformaciones lineales.

1. Sean U, W dos susbespacios vectoriales de otro espacio vectorial V de dimensión finita sobre un campo F. Si U es subespacio de W. Demostrar que $dim_F(U) \leq dim_F(W)$.
2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un campo F y sea W un subespacio de V de dimensión $n-1$. Si U es un subespacio de V no contenido en W.Demostrar que $dim_F(W \cap U) = dim_F(U) - 1$.
3. Sea $T_{n\times n} = \{A\epsilon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \,|\, A_{i.j} = 0, i > j\}$ y sea $S_{n\times n} = \{A\epsilon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{A} = A^t\}$. Demostrar que $\dim(T_{n\times n} + S_{n\times n}) = \dim(T_{n\times n}) + \dim(S_{n\times n}) - \dim(T_{n\times n} \cap S_{n\times n})$.

4. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un campo F y sea W y Y subespacios vectoriales distintos de V, con $dim_F(W) = dim_F(Y) = n-1$.Calcular $dim_F(W \cap Y)$.
5. Sean $W = [\{(1,2,1,0), (-1,1,1,1)\}]$ y $U = [\{(2,-1,0,1), (-5,6,3,0)\}]$ subespacios de $\mathbb{R}^4$.Encuentre la dimensión de $W + U$ y $W \cap U$.
6. Si $S_{n\times n} = \{A\epsilon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{A} = A^t\}$ y $A_{n\times n} = \{A\epsilon M_{n\times n}(\mathbb{R}) \,|\, \mathrm{A} = -A^t\}$Demostrar que $M_{n\times n}(\mathbb{R}) = S_{n\times n}(\mathbb{R}) \oplus A_{n\times n}(\mathbb{R})$.
7. Demuestre o de un contraejemplo. Sea V un espacio vectorial sobre F y $A, A', A'' \leq V$son tales que $V = A \oplus A'$ y $V = A \oplus A''$entonces $A' = A''$.
8. ¿Cuáles de las siguientes funciones $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son transformaciones lineales?
   a) $T(x_1, x_2) = (1 + x_1, x_2)$
   b) $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$
   c) $T(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$
   d) $T(x_1, x_2) = (sen(x_1), x_2)$
9. Sea V el espacio vectorial de la matrices de tamaño $n \times n$ sobre el campo F y sea $B\epsilon M_{n\times\times n}(F)$. Sea $T: M_{n\times n\times}(F) \longrightarrow M_{n\times\times n}(F)$ el operador conmutador definido como sigue :$T(A) = AB - BA$. Demostrar si T es una transformación lineal o no.
10. Sea $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal $T(1,1,1) = (1,2,-1)$,$T(1,0,-1) = (0,1,1)$ y$T(0,-1,1)$=(3,3,3). Encuentre $v\epsilon\mathbb{R}^3$tal que $T(v) = (1,0,0)$.
11. Sea $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como$T(a,b,c) = (a+b, b+c, a+c)$.Demuestre que T es una transformación lineal y encuentre su núcleo e imagen
12. Sea $E: C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, la función esperanza, definida como sigue:$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ con $g, f\epsilon C[a,b]$ el espacio de funciones continuas sobre el intervalo $[a,b]$. Demostrar que E es una función lineal.