Tarea 2. Álgebra lineal 1. Teorema de la dimensión ,sumas directas y Transformaciones lineales(Básicas)

1. Sea V un K espacio y U, W subespacios de W. Demuestre que $V = U \oplus W$ si y sólo si cada elemento v se puede expresar de manera única como $v = u + w$ con u y $w \in W$.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión finita n sobre un campo F y sea W un subespacio de V de dimensión $n - 1$. Si U es un subespacio de V no contenido en W. Demostrar que $dim_F(W \cap U) = dim_F(U) - 1$.

3. Sea $T_{n\times n} = \{A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A_{i,j} = 0 \ i > j\}$ y sea $S_{n\times n} = \{A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$. Demostrar que $dim(T_{n\times n} + S_{n\times n}) = dim(T_{n\times n}) + dim(S_{n\times n}) - dim(T_{n\times n} \cap S_{n\times n})$

4. Demuestre que dados W, Z subespacios de V sobre un campo F,$V = W \oplus Z$ si y sólo si Z es subespacio mínimo en $\{U \leq V \mid W + U = V\}$.(i. e, si $\exists Z'$ subespacio tal que $Z \leq Z'$ y Z' satisface también ser complemento de W en V entonces $Z = Z'$).

5. Sean $W = [\{(1, 2, 1, 0), (-1, 1, 1, 1)\}]$ Y $U = [\{(2, -1, 0, 1), (-5, 6, 3, 0)\}]$ subespacios de $\mathbb{R}^4$. Encuentre la dimensión de $W + U$ y $W \cap U$.

6. Si $S_{n\times n} = \{A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A = A^t\}$ y $A_{n\times n} = \{A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A = -A^t\}$. Demostrar que $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) = S_{n\times n}(\mathbb{R}) \oplus A_{n\times n}(\mathbb{R})$.

7. Demuestre o dé un contraejemplo. Sea V un espacio vectorial sobre F y $A, A', A'' \leq V$ subespacios de V tales que $V = A \oplus A'$ y $V = A \oplus A''$ entonces $A' = A''$.

8. ¿Cuáles de las siguiente funciones $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ son transformaciones lineales?

   a) $T(x_1, x_2) = (1 + x_1, x_2)$

   b) $T(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$

   c) $T(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2)$

   d) $T(x_1, x_2) = (sen(x_1), x_2)$

9. Sea V el espacio vectorial de las matrices de tamaño $n \times n$ sobre el campo F y sea $B \in \mathbb{M}_{n\times n}(F)$.Sea $T : \mathbb{M}_{n\times n}(F) \longrightarrow \mathbb{M}_{n\times n}(F)$ el operador conmutador definido como sigue $T(A) = AB - BA$.Demostrar si T es una transformación lineal o no.

10. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que $T(1, 1, 1) = (1, 2, -1)$,$T(1, 0, -1) = (0, 1, 1)$ y $T(0, -1, 1) = (3, 3, 3)$.Encuentre $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (1, 0, 0)$.

11. Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida como $T(a, b, c) = (a + b, b + c, a + c)$. Demuestre que T es una transformación lineal y encuentre su núcleo e imagen.

12. Sea $E : C[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, la función esperanza definida como $E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ con $g, f \in C[a, b]$ el espacio de funciones continuas sobre el intervalo $[a, b]$. Demostrar que E es una función lineal.