Ej. 171 Golan Sea V un e.v. de dimensión n sobre un campo F y sea W el subespacio de V de dimensión $n-1$. Si U es un subespacio de V no contenido en W, i.e., $V \nsubseteq W$.

Mostrar que $\dim(W \cap U) = \dim(U) - 1$.

Por el teo de la dimensión (Grassmann) tenemos

$$\dim(W \cap U) = \dim(W) + \dim(U) - \dim(W+U) \quad (*)$$

Afirmamos que $\dim(W+U) = n$ (1) ya que $U \nsubseteq W$, es decir, existe al menos un $u \in U$ y $u \notin W$ y tomando $\gamma = \{v_1, v_2, \dots, v_{n-1}\}$ base de W, podemos extenderla a $\gamma \cup \{u\}$, ya que $u \notin W$ y como $W \supseteq [W]$ por ser esp. vect entonces $u \notin [W]$

Por lo tanto $\gamma \cup \{u\}$ es base de $W+U$.

Sustituyendo (1) en (*) tenemos

$$\dim(W \cap U) = (\cancel{n} - 1) + \dim(U) - \cancel{n}$$

$$= \dim(U) - 1 \quad \blacksquare \quad \checkmark\checkmark$$