1

Ej. 182. Sea $W = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 4\\3\\2\\1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6\\2\\2\\2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\2 \end{bmatrix} \right\}\right] \subseteq \mathbb{R}^4$ y

sea $Y = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 4\\-2\\0\\-2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1\\0\\3\\2 \end{bmatrix} \right\}\right] \subseteq \mathbb{R}^4$

Encontrar $\dim(W+Y)$ y $\dim(W \cap Y)$.

SOLUCIÓN.

Observamos que $3 \leq \dim(W+Y) \leq 4 \quad (1)$ ya que $W \subseteq W+Y$

y además debido a que $\dim(W)=3 \wedge \dim(Y)=2$

Multiplicando por (-1) la desigualdad (1) obtenemos

$$-4 \leq -\dim(W+Y) \leq -3$$

$$\Rightarrow -4+3=-1 \leq \dim(W)-\dim(W+Y) \leq -3+3=0$$

$$\Rightarrow -1+2=1 \leq \dim(W)+\dim(Y)-\dim(W+Y)=\dim(W \cap Y) \leq 2$$

Por lo tanto hay 2 candidatos posibles de $\dim(W \cap Y)$ que es 1 o 2.

Para calcular $\dim(W \cap Y)$ exactamente sea $v \in W \cap Y$ y damos escalares a, b, c, d y e tales que:

$$v = a\begin{bmatrix} 4\\3\\2\\1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 6\\2\\2\\2 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 1\\1\\1\\2 \end{bmatrix} = d\begin{bmatrix} 4\\-2\\0\\-2 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 1\\0\\3\\2 \end{bmatrix}$$

y esto equivale a resolver el sig. sistema:

$$\begin{aligned} 4a + 6b + c &= 4d + e \\ 3a + 2b + c &= -2d \\ 2a + 2b + c &= 3e \\ a + 2b + 2c &= -2d + 2e \end{aligned}$$

Asociando la resp. matriz