Ejercicio 4. Tarea 2. Demuestre que dados W, Z subespacios de V sobre un campo F,$V = W \oplus Z$ si y sólo si Z es subespacio mínimo en $\{U \leq V \mid W + U = V\}$.(i. e, si $\exists Z'$ subespacio tal que $Z \leq Z'$ y Z' satisface también ser complemento de W en V entonces $Z = Z'$).

Parte clave La parte clave de este ejercicio es el regreso $\Leftarrow$, sobre todo demostrar que $W \cap Z = \{0\}$ para finalmente concluir que $V = W \oplus Z$. Para esto procedamos por contradición:
Supongamos que $W \cap Z \neq \{0\}$, es decir $\exists l \in W \cap Z$ tal que $l \neq 0$
. Como $l \in W$ entonces $l = w$ para algún $w \in W$ **Ecuación 1.**

Como $l \in V = W + Z$ entonces $l = w' + z'$ con $w' \in W$ y $z' \in Z$ **Ecuación 2.**
De la **ecuación 2** tenemos $z' = l - w' = w - w' \in W$ sustituyendo la **ecuación 1** $l = w$ y por la propiedad de cerradura de la suma (ya que W es subespacio vectorial de V). esto implica $\forall z' \in Z \Rightarrow z' \in W$, es decir$Z \subseteq W$, por lo que:
$W + Z = W = V \implies Z = \{0\}$ y esto resulta una **CONTRADICCIÓN** ya que habìamos supuesto que $\exists l \in Z$ con $l \neq 0$. Por lo tanto,$W \cap Z = \{0\}$.